МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ

**Федеральное государственное автономное
образовательное учреждение высшего образования
"Национальный исследовательский Нижегородский
государственный университет им. Н.И. Лобачевского**

Е.Л. Панкратов

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие

Рекомендовано методической комиссией Института экономики и
предпринимательства для студентов ННГУ, обучающихся
по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность»

Нижний Новгород
2019

УДК 517.958 (075)
ББК В311
П-16

П-16 Панкратов Е.Л.: Функции многих переменных. Учебно- методическое пособие. - Нижний Новгород: Нижегородский госуниверситет, 2019. - 37 с.

Рецензент: **к.ф.-м.н., доцент Т.В. Лухманова**.

Учебно-методическое пособие «Функции многих переменных» подготовлено для ознакомления студентов, обучающихся по специальности 38.05.01 «Экономическая безопасность», с соответствующим разделом (математический анализ) курса «Математика». Оно содержит основные понятия о функциях многих переменных, их пределах и частных производных, экстремумах функций многих переменных, элементах теории поля. Для закрепления теоретических знаний по функциям многих переменных в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания.

Ответственная за выпуск:
председатель методической комиссии ИЭП ННГУ,
к.э.н., доцент Едемская С.В.

УДК 517.958 (075)
ББК В311

Содержание

ВВЕДЕНИЕ

Часто для описания реальных физических, биологических процессов (например, пространственно-временного распределения температуры) одной переменной не достаточно. Обобщением функции одной переменной является функция нескольких переменных. В данном пособии изложены основные понятия о функциях многих переменных, их пределах и частных производных, экстремумах функций многих переменных, элементах теории поля. Для закрепления теоретических знаний по функциям многих переменных в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов). В результате изучения раздела математики «Математический анализ» курса «Математика» студенты должны уметь вычислять пределы функций многих переменных, их частные производные, находить экстремумы функций многих переменных.

Раздел 1. Основные определения

Определение 1

Пусть имеются два элемента x и y из некоторого множества D (в данном случае они находятся на плоскости). Пусть данной паре чисел поставлено по некоторому закону в соответствие одно число f. Тогда считается, что задана функция двух переменных $f(x,y)$. В символической области функция двух переменных может быть записана следующим образом:

$$z=f(x,y),\ (x,y)\in D.$$

Множество D называется областью определения функции z. Например, в случае прямоугольной области S с размерами x и y область определения имеет следующий вид:

$$S=x\cdot y,\ (x,y)\in D=\{x>0,\ y>0\}.$$

Пример 1

Пусть имеется эллипсоид

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1.$$

В данном случае z является функцией двух переменных x и y следующего вида:

$$z=\pm c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\,.$$

Далее (для простоты) чаще будем рассматривать функции двух переменных. Для функций большего числа переменных рассуждения аналогичны.

Часто (особенно в картографии) функции нескольких переменных изображают с помощью линий или поверхностей уровня.

Определение 2

Линия уровня - это множество точек, соответствующих некоторому постоянному значению функции двух переменных, т.е.

$$f(x,y)=const.$$

Определение 3

Поверхность уровня - это множество точек, соответствующих некоторому постоянному значению функции трёх переменных, т.е.

$$f(x,y,z)=const.$$

По картине линий уровня можно получить представление о поверхности. Например, если линии уровня замкнуты в окрестности некоторой точки, то в этом месте поверхность имеет либо вершину, либо впадину. Поэтому линии уровня могут снабжаться пометками высот. Частота линий уровня позволяет судить о крутизне склонов поверхности.

Раздел 2. Предел и непрерывность функции многих переменных

На первом этапе рассмотрения данного раздела необходимо ввести понятие определение ε-окрестности точки $M(x_0,y_0)$ как совокупность точек $M(x,y)$, удовлетворяющих неравенству:

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2\le\varepsilon^2.$$

Будем говорить, что последовательность точек

$$(x_1,y_1),\ (x_2,y_2),\ \dots,\ (x_n,y_n),\ \dots$$

стремится или сходится к точке $M_0(x_0,y_0)$, если расстояние между n-м членом этой последовательности и точкой M_0

$$\sqrt{(x_n-x_0)^2+(y_n-y_0)^2}$$

стремится к нулю при $n\to\infty$. В дальнейшем мы будем применять одну их эквивалентных записей:

$$\begin{cases} x\to x_0 \\ y\to y_0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \Delta x\to 0 \\ \Delta y\to 0 \end{cases} \Leftrightarrow M\to M_0.$$

Определение предела функции двух переменных по форме совпадает с определением предела функции одной переменной: число A называется пределом функции $z=f(x,y)$ если для любой последовательности точек (x_1,y_1), (x_2,y_2), ..., (x_n,y_n), ... сходящейся к точке (x_0,y_0), соответствующая последовательность значений функции $z_n=f(x_n,y_n)$ сходится к A. Существование у функции предела A в точке (x_0,y_0) обозначается следующим образом:

$$\lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x,y)=A.$$

Рассмотрим несколько примеров.

<u>Пример 2</u>

Рассмотрим следующий предел:

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Данный предел не существует.

<u>Пример 3</u>

Найдём предел функции $f(x,y)=sin[2(x+y)]/(x+y)$ при $x\to 0$ и $y\to 0$. Перед вычислением предела предварительно преобразуем данную функцию путём умножения и числителя, и знаменателя на 2, т.е. $f(x,y)=2sin[2(x+y)]/2(x+y)$. Введём обозначение: $z=x+y$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 0}} \frac{\sin[2(x+y)]}{x+y}=2\lim_{z\to 0}\frac{\sin(2z)}{2z}=2.$$

<u>Пример 4</u>

Найдём предел функции $f(x,y)=(x^2-y^2)/(x^4-y^4)$ при $x\to 2$ и $y\to 3$. Перед вычислением предела предварительно упростим данную функцию путём деления полинома в числителе на полином в знаменателе. В результате такого деления получаем: $f(x,y)=x^2+y^2$. Тогда

$$\lim_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\left(\frac{x^2-y^2}{x^4-y^4}\right)=\frac{1}{2^2+3^2}=\frac{1}{4+9}=\frac{1}{13}.$$

<u>Пример 5</u>

Найдём предел функции $f(x,y)=\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ при $x\to 0$ и $y\to 0$. Перед вычислением предела умножим и числитель, и знаменатель функции на величину $g(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}+1$. Тогда получаем:

$$f(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{\left(\sqrt{x^2+y^2+1}-1\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}.$$

Раскрывая скобки в знаменателе, получаем:

$$f(x,y)=\frac{\left(x^2+y^2\right)\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)}{x^2+y^2}.$$

Сокращение первого множителя в числителе данной функции и знаменателя приводит к следующему результату:

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2+1}+1.$$

Таким образом, значение предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{x^2+y^2}{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}$ совпадает со значением предела $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)$. Вычисление второго предела позволяет получить:

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\left(\sqrt{x^2+y^2+1}+1\right)=2.$$

Понятие предела даёт возможность определить непрерывность функции в данной точке. Функция $z=f(x,y)$ непрерывна в точке (x_0,y_0) при выполнении следующего условия:

$$\lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=f(x_0,y_0). \qquad (1)$$

Соотношение (1) показывает, что под непрерывностью функции $f(x,y)$ понимается:
1) функция определена в данной точке и её окрестности;
2) существует предел функции в этой точке;
3) предел функции равен значению функции в этой точке.

При нарушении хотя бы одного из этих условий функция имеет разрыв в данной точке. Свойство непрерывности через приращения представимо в следующем виде:

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} \left[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \right] = 0 .$$

Данное соотношение показывает, что “малым” изменениям аргументов соответствуют “малые” изменения функции. Рассмотренные понятия обобщаемы на функции большего числа переменных. Если функция непрерывна в любой точке некоторой области, то она непрерывна в этой области.

Раздел 3. Дифференцирование функций многих переменных

Для функции одной переменной производная в данной точке равна пределу отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее приращение стремится к нулю. В случае функции двух переменных приращения аргументов (Δx,Δy) из данной точки $M_0(x_0,y_0)$ в точку $M_0(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)$ могут быть сделаны в любом направлении на плоскости. По этой причине можно определить предел отношения приращения функции к приращению аргументов в зависимости от выбранного направления приращений аргументов. Это приводит к понятию производной функции двух переменных по данному направлению, которая характеризует скорость изменения функции в этом направлении.

Определение 4

Рассмотрим случай, когда приращения происходят в направлении оси абсцисс, т.е. когда $\Delta x \neq 0$, $\Delta y = 0$. Соответствующий данному случаю предел

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = f'_x(x_0, y_0).$$

называется частной производной функции $f(x,y)$ по переменной x в точке $M_0(x_0, y_0)$. Аналогично можно определить частную производную по y:

$$\lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta y} = \frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = f'_y(x_0, y_0).$$

Геометрический смысл частных производных

Пусть в некоторой окрестности точки $M_0(x_0,y_0)$ задана функция $z=f(x,y)$, у которой в этой точке существуют частные производные. Выясним их геометрический смысл. Зафиксируем одну из переменных, например, переменную x. Тогда в плоскости $y=y_0$ (см. рис. 1) мы получаем функцию одной переменной $z(x)=f(x, y_0)$. Ранее уже рассматривался геометрический смысл производной от функции одной переменной, и было показано, что производная от функции одной переменной равна тангенсу угла наклона касательной (в точке, в которой взята производная) по отношению к оси абсцисс. Аналогичный смысл у частной производной функции $z(x)=f(x,y_0)$ по x

$$\left.\frac{\partial f(x, y_0)}{\partial x}\right|_{x=x_0} = tg(\alpha),$$

где α - угол между касательной к функции $f(x,y_0)$ в точке x_0 и осью абсцисс. Полностью аналогичным является геометрический смысл производной $f(x,y)$ по переменной y:

$$\left.\frac{\partial f(x_0, y)}{\partial y}\right|_{y=y_0} = tg(\beta),$$

где β - угол между касательной к функции $f(x,y_0)$ в точке y_0 и осью ординат.

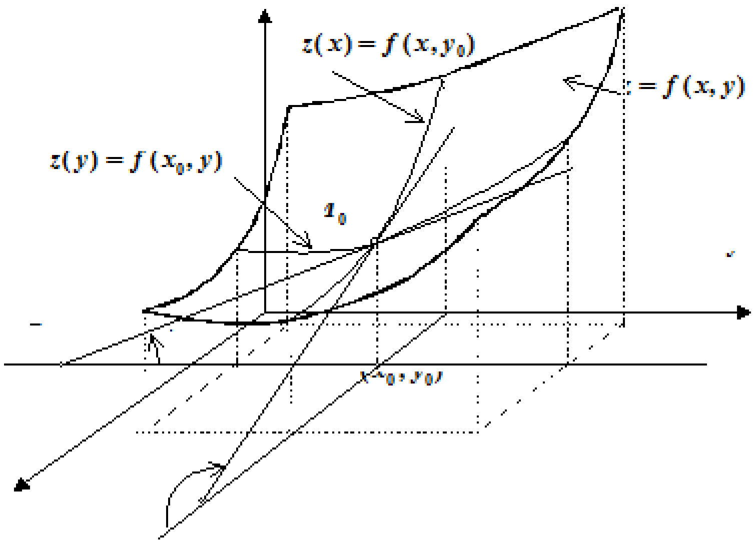

Рис. 1

В отличие от функции одной переменной, для которой из существования производной в данной точке следует её непрерывность в этой точке, для функции двух переменных $z=f(x,y)$ из существования частных производных ещё не следует непрерывность функции в данной точке. Рассмотрим следующий пример:

Пример 6

$$f = \begin{cases} \dfrac{2x\,y}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x = y = 0 \end{cases}.$$

Частные производные данной функции в начале координат равны нулю, но в этой точке функция имеет разрыв.

Производная по направлению

Определение 5

Пусть имеется функция $f=f(x,y)$, определённая в области D. В некоторой внутренней точке $M_0(x_0,y_0)$ вектором $\vec{l}$ задано направление (см. рис.2). Рассмотрим поведение функции при движении точки $M(x,y)$ в данном направлении $\vec{l}$. Пусть t расстояние между точками M_0 и M, а $\vec{e} = \vec{i}\cos(\alpha) + \vec{j}\sin(\alpha)$ - единичный вектор заданного направления $\vec{l}$. В данном случае координаты точки $M(x,y)$ определяются следующим соотношением: $x = x_0 + t\,cos(\alpha)$, $y = y_0 + t\,sin\,(\alpha)$. Если точка M стремится к точке M_0 в заданном направлении, то $t \to 0$.

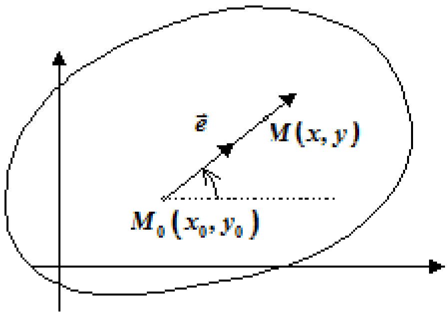

Рис. 2

Производной функции $f=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ в заданном направлении $\vec{l}$ называется следующий предел:

$$\lim_{t\to 0}\frac{f\left(x_0+t\cos(\alpha), y_0+t\sin(\alpha)\right)-f(x_0,y_0)}{t}=\frac{d\,f(x_0,y_0)}{d\,\vec{l}}=$$

$$=\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x}\cos(\alpha)+\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\sin(\alpha). \quad (2)$$

Частными случаями данного предела являются частные производные $\partial f/\partial x$ и $\partial f/\partial y$. Данные производные являются производными по направлению координатных осей Ox и Oy соответственно. Производная по направлению выражается через частные производные в этой точке. Чтобы это доказать, необходимо вычисление частных производных функций нескольких переменных.

Дифференцирование сложных функций

Предположим, что функция $z=f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные в области D, а функции $x(t)$ и $y(t)$ имеют непрерывные производные в промежутке $\alpha \le t \le \beta$. Тогда функция $f=f(x(t),y(t))$ - сложная функция одной переменной t. Для производной dz/dt данной функции справедлива следующая формула:

$$\frac{d\,f}{d\,t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{d\,x}{d\,t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{d\,y}{d\,t}. \quad (3)$$

Для доказательства рассмотрим приращение:

$$\Delta f = f(x,y)-f(x_0,y_0)=f(x,y)-f(x_0,y)+f(x,y_0)-f(x_0,y_0).$$

В первой из разностей изменяется только x, а во второй - только y, т.е. каждая из этих разностей - это функция одной переменной. Применим к ним формулу Лагранжа (формулу конечных приращений):

$$\Delta f = f'_x(\xi,y)(x-x_0)+f'_y(x,\eta)(y-y_0),$$

где ξ лежит в интервале между x и x_0, а η - между y и y_0. К разностям x-x_0 и y-y_0 опять применим формулу Лагранжа:

$$x-x_0=x(t)-x(t_0)=x'(t_1)(t-t_0)=x'(t_1)\Delta t,$$

$$y-y_0=y(t)-y(t_0)=y'(t_2)(t-t_0)=y'(t_2)\Delta t,$$

где t_1, t_2 расположены между t и t_0. Таким образом,

$$\frac{\Delta f}{\Delta t}=f'_x(\xi,y_0)x'(t_1)+f'_y(x_0,\eta)y'(t_1).$$

Переходя в этом равенстве к пределу и замечая, что при $\Delta t\to 0$ имеем:

$$t\to t_0\Rightarrow t_1,t_2\to t_0\Rightarrow x\to x_0,\ y\to y_0\Rightarrow \xi\to x_0,\ \eta\to y_0,$$

с учётом непрерывности всех, входящих в это равенство функций, получаем:

$$\left(\frac{df}{dt}\right)_{t_0}=f'_x(x_0,y_0)x'(t_0)+f'_y(x_0,y_0)y'(t_0).$$

В силу произвольности значения t_0 приходим к формуле (3). Последнее соотношение является обобщением формулы производной сложной функции одной переменной. В случае большего числа переменных, например, трёх, т.е. $z=f(u(t), v(t),w(t))$, можно получить:

$$\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dt}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{dv}{dt}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{dw}{dt}.$$

Далее получим соотношение для вычисления производной по направлению. Согласно соотношению (2) производная по направлению совпадает с производной от сложной функцией $f=f(x,y)$, где $x(t)=x_0+t\cos(\alpha)$, $y(t)=y_0+t\sin(\alpha)$. С учётом соотношения (3), получаем:

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos(\alpha)+\frac{\partial f}{\partial y}\sin(\alpha). \tag{4}$$

Следует заметить, что в определении производной по направлению мы приближаемся к данной точке с одной стороны, т.е. имеем односторонний предел. Например, частная производная по отрицательному направлению оси абсцисс отличается знаком от частной производной по переменной x.

Аналогично вводится понятие производной по направлению для функции трёх переменных $u=F(x,y,z)$:

$$\frac{\partial u}{\partial \vec{l}}=\frac{\partial F}{\partial x}\cos(\alpha)+\frac{\partial F}{\partial y}\cos(\beta)+\frac{\partial F}{\partial z}\cos(\gamma),$$

где $\vec{e}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}+\cos\gamma\,\vec{k}$ - единичный вектор заданного направления $\vec{l}$, а α, β, γ - углы между осями координат и этим вектором.

Приведём без доказательства формулы для производной сложной функции $z=f(u,v)$, $u=u(x,y)$, $v=v(x,y)$. Фактически функция

$$f=f(u(x,y),v(x,y))=\Phi(x,y)$$

является функцией двух переменных и ее частные производные находятся по формулам

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x},\ \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

Дифференцирование неявных функций

Полученные нами правила дифференцирования сложных функций позволяют более просто, чем ранее, находить производные функций, заданных неявно. Пусть уравнение

$$F(x,y)=0$$

определяет $y=\varphi(x)$ как некоторую дифференцируемую функцию. Тогда имеем тождество

$$F(x,\varphi(x))=0.$$

Дифференцируем его по переменной x, рассматривая левую часть как сложную функцию одной переменной, где $x=x$ и $y=\varphi(x)$

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}=0\Rightarrow\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial y}. \qquad (5)$$

Пусть теперь уравнение $F(x,y,z)=0$ определяет $z=(x,y)$ как некоторую функцию двух переменных, у которой существуют частные производные. Для их нахождения продифференцируем тождество $F(x,y,z(x,y))=0$ по переменной x, рассматривая его левую часть как сложную функцию $F(u,v,w)$, где «промежуточные» функции имеют вид: $u=x$, $v=y$, $z=z(x,y)$:

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dx}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dx}=0.$$

Поскольку x и y независимые переменные, то $dy/dx=0$ и, следовательно,

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\partial F}{\partial x}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Аналогично, из равенства

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dy}+\frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dy}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dy}=0.$$

получаем

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial z}.$$

Дифференцируемость функции двух переменных. Дифференциал

Из теории функций одной переменной $y=f(x)$ известно, что её дифференцируемость в данной точке означает существование производной функции в этой точке. Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке x_0, то её приращение в этой точке может быть представлено в виде:

$$\Delta y=f'(x_0)\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x)\Delta x,$$

где $\alpha(\Delta x)\to 0$ при $\Delta x\to 0$. Более подробная запись этой формулы

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0)+\alpha(\Delta x)\Delta x$$

показывает геометрическую интерпретацию свойства дифференцируемости: в окрестности точки x_0 кривая $y=f(x)$ отличается от своей касательной в этой точке

$$Y=y_0+f'(x_0)(x-x_0)$$

на бесконечно малую величину более высокого порядка, чем Δx (см. рис. 3). Данное свойство может быть перенесено на функции двух переменных, т.е. функцию $z=f(x,y)$, имеющую в точке (x_0,y_0) непрерывные частные производные, представить приближённо в виде линейной функции двух переменных, т.е. чтобы её приращение в точке (x_0,y_0) имело вид:

$$\Delta f=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\Delta y+\alpha(\Delta x,\Delta y)\Delta\rho\,. \qquad (6)$$

где $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$, а величина $\alpha(\Delta x,\Delta y)\to 0$ при $\Delta x\to 0$ и $\Delta y\to 0$, т.е. при $\Delta\rho\to 0$. Это означает, что в окрестности точки (x_0,y_0) поверхность $f=f(x,y)$ можно “приблизить” плоскостью

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0(x-x_0)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0(y-y_0)-(f-f_0)=0\,.$$

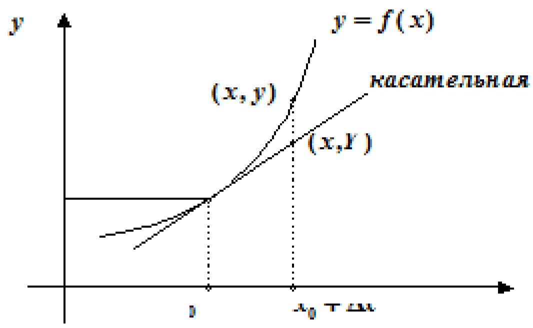

Рис. 3

Чтобы это показать представим приращение функции Δz в виде двух слагаемых

$$\Delta f=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0+\Delta y)+f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0). \qquad (7)$$

Каждое из них представляет собой функцию одной переменной, к которой применима формула Лагранжа. Например, функция $F(x)=f(x,y+\Delta y)$ дифференцируема в соответствующем промежутке, т.к. её производная совпадает с частной производной $f'_x(x,y_0+\Delta y)$, которая, по условию, существует в окрестности точки (x_0,y_0). Применив к каждой из разностей в (7) формулу конечных приращений, будем иметь:

$$\Delta f=f'_x(x_0+\theta_1\Delta x,y_0+\Delta y)+f'_y(x_0+\Delta x,y_0+\theta_2\Delta y),$$

где $0<\theta_1<1$, $0<\theta_2<1$. Поскольку частные производные непрерывны в данной точке, то их приращения - бесконечно малые при $\Delta\rho\to 0$, т.е.

$$f'_x(x_0+\theta_1\Delta x, y_0+\Delta y)-f'_y(x_0,y_0)=\alpha_1(\Delta x,\Delta y),$$
$$f'_y(x_0+\Delta x, y_0+\theta_2\Delta y)-f'_y(x_0,y_0)=\alpha_2(\Delta x,\Delta y),$$
где $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\alpha_1(\Delta x,\Delta y)=\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\alpha_2(\Delta x,\Delta y)=0$. Таким образом,
$$\Delta f=f'_x(x_0,y_0)\Delta x+f'_y(x_0,y_0)\Delta y+\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y\,.$$
Преобразуем бесконечно малую $\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y$ следующим образом:
$$\alpha_1\Delta x+\alpha_2\Delta y=\left(\alpha_1\frac{\Delta x}{\Delta\rho}+\alpha_2\frac{\Delta y}{\Delta\rho}\right)\Delta\rho=\alpha(\Delta x,\Delta y).$$
Оценим величину
$$|\alpha(\Delta x,\Delta y)|\le|\alpha_1|\frac{|\Delta x|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}+|\alpha_2|\frac{|\Delta y|}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\alpha_1+\alpha_2\,.$$
Отсюда следует, что $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\alpha(\Delta x,\Delta y)=0$. Итак, приращение функции представлено в виде (6).

Дадим теперь определение дифференцируемости функции двух переменных. Функция $z=f(x,y)$ дифференцируема в точке (x_0,y_0), если её приращение в этой точке может быть представлено в виде (6). Переход в (6) к пределу $\Delta\rho\to 0$ приводит к следующему результату: $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\Delta f=0$.

Очевидно, что из дифференцируемости следует непрерывность. Действительно, перейдя в равенстве (6) к пределу, получим $\lim\limits_{\Delta\rho\to 0}\Delta f=0$, что и означает свойство непрерывности.

Следует заметить, что существование частных производных в данной точке не влечёт за собой дифференцируемости функции в этой точке. Если в точке (x_0,y_0) существуют частные производные $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0$, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0$, то формально уравнение плоскости можно написать, но назвать её касательной плоскостью в указанном выше смысле нельзя. Например, непрерывная функция:
$$f=\sqrt{|x|\cdot|y|}$$
имеет в начале координат частные производные равные нулю.
$$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot 0}-0}{\Delta x}=0\,,\quad f'_y=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\sqrt{0\cdot|\Delta y|}-0}{\Delta y}=0\,.$$
Приращение этой функции в начале координат равно $f=\sqrt{|x|\cdot|y|}$. Но эта величина не является бесконечно малой более высокого порядка, чем $\Delta\rho=\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}$. Действительно, если $\Delta x=\Delta y$, то отношение:

$$\frac{\sqrt{|\Delta x|\cdot|\Delta y|}}{\sqrt{\Delta x^2+\Delta y^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

не стремится к нулю при $\Delta\rho\to 0$. Поэтому плоскость $f=0$ нельзя считать касательной плоскостью к этой поверхности в точке (0,0).

Дифференциалом функции $f=f(x,y)$ в точке $M_0(x_0,y_0)$ называют главную, линейную относительно приращений аргументов Δx и Δy часть приращения функции Δz в этой точке:

$$(d f)_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\Delta y.$$

Поскольку точка произвольная, то запишем формулу для дифференциала, опуская нижний индекс. Учтём также, что дифференциалы независимых переменных равны их приращениям. Итак,

$$d f=\frac{\partial f}{\partial x}d x+\frac{\partial f}{\partial y}d y.$$

Геометрический смысл дифференциала функции двух переменных может быть сформулирован следующим образом. Дифференциал данной функции равен приращению аппликаты касательной плоскости.

Отметим также, что дифференциал функции двух переменных применяется, как и дифференциал функции одной переменной, для приближенных вычислений по формуле

$$\Delta f\approx(d f)_0=\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_0\Delta x+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_0\Delta y.$$

Производные и дифференциалы высших порядков

Определение 6

Для функции двух переменных производные и дифференциалы высших порядков определяются аналогично соответствующим понятиям для функции одной переменной. Рассмотрим, например, вторую частную производную от функции $z=f(x,y)$ по переменной x. Она определяется как частная производная по x от частной производной по x, т.е.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

В общем случае (пусть $n>m$) можно записать:

$$\frac{\partial^n f}{\partial x^m\partial y^{n-m}}=\frac{\partial^m}{\partial x^m}\left(\frac{\partial^{n-m} f}{\partial y^{n-m}}\right),$$

причём последовательность, в которой вычисляются смешанные производные, если они существуют, не имеет значения. Например,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

Дифференциал второго порядка определяется как дифференциал от дифференциала, т.е.

$$d^2 f = d(d f) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} d x + \frac{\partial f}{\partial y} d y\right).$$

Отсюда следует, что

$$d^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} d x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} d x d y + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} d y^2.$$

Аналогично определяются дифференциалы более высоких порядков.

Раздел 4. Градиент

Определение 7

При исследовании поведения функции двух переменных $f(x,y)$ в данной точке одним из вопросов является направление наибольшего изменения функции, т.е. интерес представляет направление, в котором у поверхности в данной точке самый крутой склон. Для ответа на этот вопрос введём следующий вектор:

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\vec{j},$$

называемый градиентом. Предполагаем, что этот вектор не нулевой. Тогда согласно (4) производная по направлению в данной точке равна скалярному произведению градиента в этой точке на единичный вектор заданного направления

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \frac{\partial f}{\partial x}\cos(\alpha) + \frac{\partial f}{\partial y}\sin(\alpha) = \left(\overrightarrow{grad}(f), \vec{e}\right).$$

Из равенства

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{l}} = \left(\overrightarrow{grad}(f), \vec{e}\right) = \left|\overrightarrow{grad}(f)\right| \cdot |\vec{e}| \cdot \cos(\varphi),$$

где φ - угол между векторами, видно, что направление наибольшего возрастания функции должно совпадать с направлением градиента функции в данной точке, т.к. наибольшее значение правой части этого равенства достигается при $\varphi=0$. Теперь можно сформулировать геометрический смысл градиента.

Градиент - это вектор, указывающий направление наибольшего возрастания функции в данной точке. Термин и обозначение $\overrightarrow{grad}\, f$ ввёл Максвелл, позаимствовав его из метеорологии. При первом появлении (1873г.) он намеревался дать название «скат» или «склон» скалярной функции f, используя слово “slope”, чтобы указать направление наиболее быстрого убывания функции f. Это свойство градиента применяется для численного поиска экстремумов функции многих переменных.

В трёхмерном случае градиент определяется как вектор, координаты которого есть частные производные скалярной функции $u=F(x,y,z)$

$$\overrightarrow{grad}(F)=\frac{\partial F}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial F}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial F}{\partial z}\vec{k}.$$

Рассмотрим геометрический смысл модуля градиента функции двух переменных. Пусть $\vec{e}$ - единичный вектор направления наибольшего возрастания функции в данной точке. Тогда производная по этому направлению равна

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\left(\overrightarrow{grad}(f),\vec{e}\right)=\left|\overrightarrow{grad}(f)\right|=\sqrt{f_x'^2+f_y'^2}.$$

Данное соотношение показывает, что модуль градиента - это “скорость” изменения функции в направлении наибольшего возрастания функции в данной точке. Рассмотрим, как характеризует величина этой “скорости” поверхность $f(x,y)$ в окрестности данной точки. Возьмём сечение поверхности вертикальной плоскостью, проходящей через точку $M(x_0,y_0)$ и вектор $\vec{e}$ (см. рис. 4).

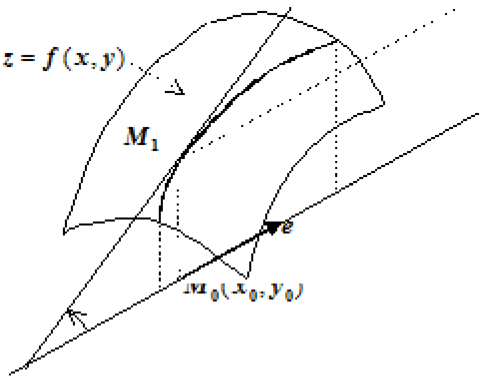

Рис. 4.

Касательная BM_1 к сечению поверхности в точке $M_1(x_0,y_0,z_0)$ составляет с вектором $\vec{e}$, а значит и с плоскостью xOy, угол α, тангенс которого равен

$$tg(\alpha)=\frac{\partial f}{\partial \vec{e}}=\left|\overrightarrow{grad}(f)\right|=\sqrt{f_x'^2+f_y'^2}.$$

Эту величину называют крутизной подъёма поверхности в данной точке.

Проверим, что в каждой точке градиент направлен по нормали к линии уровня $f(x,y)=C$, проходящей через данную точку. Пусть функция $f(x,y)$ имеет непрерывные частные производные, а её линия уровня, проходящая через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет касательную в этой точке. Обозначим направление этой касательной единичным вектором $\vec{e}$. Тогда производная по этому направлению в точке M_0 из интуитивных соображений должна быть равна нулю. Убедимся в этом. Угловой коэффициент k_1 касательной к линии уровня $f(x,y)=C$ с учётом формулы дифференцирования неявно заданной функции определяется следующим соотношением:

$$k_1 = \frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Big/ \frac{\partial f}{\partial y}.$$

С другой стороны, соотношение для углового коэффициента k_2 прямой «в направлении градиента» имеет вид:

$$k_2 = \frac{\partial f}{\partial y} \Big/ \frac{\partial f}{\partial x}.$$

Так как $k_1 k_2$=-1, то эти прямые взаимно перпендикулярны (см. рис. 5), т.е. производная в направлении касательной к линии уровня равна нулю

$$\frac{\partial f}{\partial \vec{e}} = \left(\overrightarrow{grad}(f), \vec{e} \right) = \left| \overrightarrow{grad}(f) \right| = \sqrt{f_x'^2 + f_y'^2} = 0.$$

Рассмотрим несколько примеров.

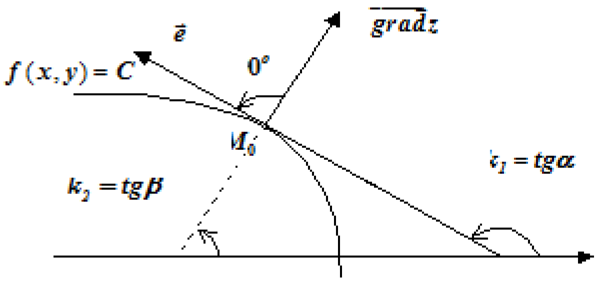

Рис. 5

Пример 6

Найдём направление наибольшего возрастания следующей функции:

$$f=4-x^2-0.25y^2,$$

а также крутизну подъёма её графика в точке $M_0(1,2)$. Искомое направление будет указывать градиент этой функции в данной точке, который определяется следующим соотношением:

$$\overrightarrow{grad}(f) = -2x \cdot \vec{i} - 0.5 \cdot y\,\vec{j}\Big|_{\substack{x=1 \\ y=2}} = -2\vec{i} - \vec{j}.$$

Соотношение для крутизны подъёма поверхности в данной точке имеет вид

$$tg(\varphi) = \left| -2\vec{i} - \vec{j} \right| = \sqrt{5} \Rightarrow \varphi \approx 66^\circ.$$

Пример 7

Найдём направление наибольшего возрастания следующей функции:

$$f=x^3+2y^2,$$

а также крутизну подъёма её графика в точке $M_0(3,3)$. Искомое направление будет указывать градиент этой функции в данной точке, который определяется следующим соотношением:

$$\overrightarrow{grad}(f) = 3x^2 \cdot \vec{i} + 4 \cdot y\,\vec{j}\Big|_{\substack{x=3 \\ y=3}} = 27\vec{i} + 12\vec{j}.$$

Соотношение для крутизны подъёма поверхности в данной точке имеет вид

$$tg(\varphi)=\left|27\vec{i}+12\vec{j}\right|=\sqrt{873}\approx 29.547\Rightarrow \varphi\approx 88.06^\circ .$$

Раздел 5. *Дивергенция векторного поля*

Определение 8

Дивергенцией векторной функции $\vec{W}(x,y,z)=W_x(x,y,z)\vec{i}+W_y(x,y,z)\vec{j}+W_z(x,y,z)\vec{z}$ называется определённый в каждой точке скаляр, определяемый следующим соотношением:

$$div\left(\vec{W}(x,y,z)\right)=\lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_S \vec{W}\cdot d\vec{S},$$

где $\oiint_S \vec{W}d\vec{S}$ - поток вектора $\vec{W}$ через поверхность *S*, ограничивающую объём *V*, $d\vec{S}=\vec{n}\,dS$, $\vec{n}$ - нормаль к поверхности *S*. Дивергенция в декартовых координатах может быть вычислена с помощью следующего соотношения

$$div\left(\vec{W}(x,y,z)\right)=\frac{\partial W_x(x,y,z)}{\partial x}+\frac{\partial W_y(x,y,z)}{\partial y}+\frac{\partial W_z(x,y,z)}{\partial z},$$

в цилиндрических координатах

$$div\left(\vec{W}(r,\varphi,z)\right)=\frac{1}{r}\frac{\partial\left[rW_r(r,\varphi,z)\right]}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial W_\varphi(r,\varphi,z)}{\partial\varphi}+\frac{\partial W_z(r,\varphi,z)}{\partial z},$$

в сферических координатах

$$div\left(\vec{W}(r,\varphi,\theta)\right)=\frac{1}{r^2}\frac{\partial\left[r^2W_r(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial r}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial W_\varphi(r,\varphi,\theta)}{\partial\varphi}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial W_\theta(r,\varphi,\theta)}{\partial\theta}.$$

Пример 8

Найти дивергенцию вектора $\vec{W}(x,y)=\left(x^2-2xy+3y-1\right)\vec{i}+\left(5x^2y-3xy^3+y^4\right)\vec{j}$.

Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$div\left(\left(x^2-2xy+3y-1\right)\vec{i}+\left(5x^2y-3xy^3+y^4\right)\vec{j}\right)=\frac{\partial\left(x^2-2xy+3y-1\right)}{\partial x}+$$

$$+\frac{\partial\left(5x^2y-3xy^3+y^4\right)}{\partial y}=2(x-y)+\left(5x^2-9xy^2+4y^3\right).$$

Пример 9

Найти дивергенцию вектора $\vec{W}(x,y)=\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\sqrt{4+x^2+y^2}\,\vec{j}$. Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$div\left(\left(x^2-y^2\right)\vec{i}+\sqrt{4+x^2+y^2}\,\vec{j}\right)=\frac{\partial\left(x^2-y^2\right)}{\partial x}+\frac{\partial\sqrt{4+x^2+y^2}}{\partial y}=2x+\frac{2x}{2\sqrt{4+x^2+y^2}}=$$

$$= 2x + x\Big/\sqrt{4 + x^2 + y^2}\ .$$

Раздел 6. *Ротор векторного поля*

Определение 9

Ротором векторной функции $\vec{W}(x,y,z) = W_x(x,y,z)\vec{i} + W_y(x,y,z)\vec{j} + W_z(x,y,z)\vec{z}$ называется определённый в каждой точке вектор, который определяется с помощью следующего соотношения

$$rot\left(\vec{W}(x,y,z)\right) = \lim_{V\to 0}\frac{1}{V}\oiint_S \vec{W}\times d\,\vec{S}\,.$$

Ротор в декартовых координатах может быть вычислен с помощью следующего соотношения

$$rot\left(\vec{V}(x,y,z)\right) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_x(x,y,z) & V_y(x,y,z) & V_z(x,y,z) \end{vmatrix} = \vec{i}\left[\frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial y} - \frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial z}\right] -$$

$$-\vec{j}\left[\frac{\partial V_z(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial z}\right] + \vec{k}\left[\frac{\partial V_y(x,y,z)}{\partial x} - \frac{\partial V_x(x,y,z)}{\partial y}\right],$$

в цилиндрических координатах

$$rot\left(\vec{V}(r,\varphi,z)\right) = \left[\frac{1}{r}\frac{\partial V_z(r,\varphi,z)}{\partial\varphi} - \frac{\partial V_\varphi(r,\varphi,z)}{\partial z}\right]\vec{r} + \left[\frac{\partial V_r(r,\varphi,z)}{\partial z} - \frac{1}{r}\frac{\partial V_z(r,\varphi,z)}{\partial\varphi}\right]\vec{\varphi} +$$

$$+\left\{\frac{\partial\left[rV_\varphi(r,\varphi,z)\right]}{\partial r} - \frac{\partial V_r(r,\varphi,z)}{\partial\varphi}\right\}\frac{\vec{z}}{r},$$

в сферических координатах

$$rot\left(\vec{V}(r,\varphi,\theta)\right) = \frac{\vec{r}}{r\sin(\theta)}\left\{\frac{\partial V_\theta(r,\varphi,\theta)}{\partial\varphi} - \frac{\partial\left[\sin(\theta)V_\theta(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial\theta}\right\} +$$

$$+\frac{\vec{\varphi}}{r}\left\{\frac{\partial V_r(r,\varphi,\theta)}{\partial\theta} - \frac{\partial\left[rV_\theta(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial r}\right\} + \frac{\vec{\theta}}{r}\left\{\frac{\partial\left[rV_\varphi(r,\varphi,\theta)\right]}{\partial\theta} - \frac{1}{\sin(\theta)}\frac{\partial V_r(r,\varphi,\theta)}{\partial\varphi}\right\}.$$

Пример 10

Найти ротор вектора $\vec{V}(x,y,z) = \left(x^2 - 2xy + 3y - 1 + x\,z^3 + \dfrac{y^2}{z}\right)\vec{i} + \ln\left(x + \dfrac{1}{y\,z}\right)\vec{k} +$ $+\left[5x^2y - 3xy^3 + \cos(z)\right]\vec{j}$. Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$rot\left(\vec{V}(x,y,z)\right) = \vec{k}\left(10x\,y - 3y^3 + 2x - 3 + 2\frac{y}{z}\right) - \vec{i}\,\frac{1 + y(x\,y\,z+1)\sin(z)}{y(x\,y\,z+1)} -$$

$$-\vec{j}\left(\frac{y\,z}{x\,y\,z+1}-3x\,z^2+\frac{y^2}{z^2}\right).$$

Пример 11

Найти ротор вектора $\vec{V}(x,y,z)=\left[x^2-y^2+tg(z)\right]\vec{i}+\sqrt{x^2-y^2-3z}\,\vec{j}-\vec{k}\ln\left[y-x\cdot\right.$ $\left.\cdot\sin\left(z^2\right)\right]$. Подстановка данного вектора в соответствующее соотношение позволяет получить:

$$rot\left(\vec{V}(x,y,z)\right)=\vec{i}\left[\frac{2z\cos\left(z^2\right)}{y-x\sin\left(z^2\right)}+\frac{3}{2\sqrt{x^2-y^2-3z}}\right]-\vec{j}\left[\frac{\sin\left(z^2\right)}{y-x\sin\left(z^2\right)}-\frac{1}{\cos^2(z)}\right]+$$

$$+\vec{k}\left[\frac{x}{\sqrt{x^2-y^2-3z}}+2y\right].$$

Для градиента:

$$grad\,(f)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}\ \text{(в декартовых координатах).}$$

$$grad\,(f)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{\varphi}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{z}\ \text{(в цилиндрических координатах).}$$

$$grad\,(f)=\frac{\partial f}{\partial r}\vec{r}+\frac{1}{r\sin(\theta)}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{\varphi}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{\theta}\ \text{(в сферических координатах).}$$

Свойства градиента

$grad\,(c)=0$, $c=const$; $\quad grad\,(c\,f)=c\,grad\,(f)$; $\quad grad\,(f_1+f_2)=grad\,(f_1)+grad\,(f_2)$

$$grad\,(f_1f_2)=f_2\,grad\,(f_1)+f_1\,grad\,(f_2);\quad grad\,(\varphi(f))=\frac{\partial\varphi}{\partial f}grad\,(f)$$

$$grad\left(\left(\vec{V}_1\vec{V}_2\right)\right)=\left(\vec{V}_2\,grad\right)\vec{V}_1+\left(\vec{V}_1\,grad\right)\vec{V}_2+\left[\vec{V}_1\,rot\left(\vec{V}_2\right)\right]+\left[\vec{V}_2\,rot\left(\vec{V}_1\right)\right].$$

Свойства дивергенции векторного поля

$div\,(c)=0$, $c=const$; $\quad div\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=div\left(\vec{V}_1\right)+div\left(\vec{V}_2\right)$; $\quad div\left(f\,\vec{V}\right)=f\,div\left(\vec{V}\right)+\vec{V}\,grad\,(f)$;

$$div\left(\left[\vec{V}_1\vec{V}_2\right]\right)=\vec{V}_2\,rot\left(\vec{V}_1\right)-\vec{V}_1\,rot\left(\vec{V}_2\right);\quad div\left(c\vec{V}\right)=c\,div\left(\vec{V}\right).$$

Свойства ротора векторного поля

$rot\,(c)=0$, $c=const$; $\quad rot\left(\vec{V}_1+\vec{V}_2\right)=rot\left(\vec{V}_1\right)+rot\left(\vec{V}_2\right)$; $\quad rot\left(f\,\vec{V}\right)=f\,rot\left(\vec{V}\right)+\left[\vec{V}grad\,(f)\right]$;

$$rot\left(\left[\vec{V}_1\vec{V}_2\right]\right)=\left(\vec{V}_2\,grad\right)\vec{V}_1-\left(\vec{V}_1\,grad\right)\vec{V}_2+\vec{V}_1\,div\left(\vec{V}_2\right)-\vec{V}_2div\left(\vec{V}_1\right).$$

Раздел 7. Оператор Гамильтона

Определение 10

Рассмотрим дифференциальный оператор, имеющий в декартовой системе координат следующий вид:

$$\nabla = \vec{i}\,\frac{\partial}{\partial x} + \vec{j}\,\frac{\partial}{\partial y} + \vec{k}\,\frac{\partial}{\partial k}.$$

Такой оператор называется оператором Гамильтона (вектором, символом “набла”). С помощью такого оператора градиент, дивергенция и ротор могут быть записаны в следующем виде

$$grad\,(f\,(x,y,z)) = \nabla\, f\,(x,y,z);\; div\left(\vec{f}\,(x,y,z)\right) = \left(\nabla, \vec{f}\,(x,y,z)\right);$$

$$rot\left(\vec{f}\,(x,y,z)\right) = \left[\nabla\, \vec{f}\,(x,y,z)\right].$$

Таким образом, градиент функции может быть рассмотрен как произведение вектора “набла” на скалярную функцию. Дивергенция функции может быть рассмотрена как скалярное произведение вектора “набла” на векторную функцию. Ротор функции может быть рассмотрена как векторное произведение вектора “набла” на векторную функцию. При этом вектор всегда стоит слева от функции.

Пример 12

С помощью вектора “набла” найдём градиент от произведения двух функций $f_1(x,y,z)$ и $f_2(x, y,z)$. Такая операция имеет следующий вид:

$$grad\,(f_1\, f_2) = \nabla\,(f_1\, f_2) = f_2\nabla\, f_1 + f_1\nabla\, f_2\,.$$

Пример 13

С помощью вектора “набла” найдём диверегенцию от произведения двух функций $f_1(x,y,z)$ и $\vec{f}_2(x,y,z)$. Такая операция имеет следующий вид:

$$div\left(f_1\,\vec{f}_2\right) = \nabla\left(f_1\,\vec{f}_2\right) = \left(\vec{f}_2, \nabla f_1\right) + f_1\left(\nabla, \vec{f}_2\right).$$

Пример 14

С помощью вектора “набла” найдём диверегенцию от произведения двух функций $f_1(x,y,z)$ и $\vec{f}_2(x,y,z)$. Такая операция имеет следующий вид:

$$rot\left(f_1\,\vec{f}_2\right) = \left[\nabla \times \left(f_1\,\vec{f}_2\right)\right] = \left[\vec{f}_2 \times \nabla f_1\right] + f_1\left[\nabla \times \vec{f}_2\right].$$

Раздел 8. Касательная плоскость и нормаль к поверхности

Пусть поверхность задана уравнением $F(x,y,z)=0$. Будем предполагать, что в точке поверхности $M(x_0,y_0,z_0)$ частные производные $\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}$, $\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}$ существуют, непрерывны и хотя бы одна из них отлична от нуля. Рассмотрим на поверхности некоторую кривую L, проходящую через точку M_0. Пусть она задана параметрическими уравнениями

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}, \ M_0(x_0, y_0, z_0) = M_0(x(t_0), y(t_0), z(t_0)).$$

Будем предполагать, что функции $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ дифференцируемы при значении параметра $t=t_0$, соответствующем точке M_0. Из-за того, что кривая L принадлежит поверхности, имеем соотношение $F(x(t),y(t),z(t))\equiv 0$, левая часть которого дифференцируема в точке $t=t_0$ как сложная функция. Дифференцируя это соотношение, получаем

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} \equiv 0. \tag{8}$$

Рассмотрим два вектора

$$\overrightarrow{grad}\left(F\left(x_0, y_0, z_0\right)\right) = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0} \vec{i} + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0} \vec{j} + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0} \vec{k}$$

и

$$\vec{l} = x'(t_0)\vec{i} + y'(t_0)\vec{j} + z'(t_0)\vec{k}.$$

Вектор $\vec{l}$ это касательный вектор к кривой L в точке M_0. Соотношение (8) показывает, что эти два вектора перпендикулярны друг другу, т.к. их скалярное произведение равно нулю. Очевидно, что соотношение (8) будет выполняться для любой кривой, лежащей на поверхности и проходящей через точку M_0. Итак, касательный вектор к любой кривой на поверхности, проходящей через точку M_0, перпендикулярен к фиксированному вектору $\overrightarrow{grad}\left(F\left(x_0, y_0, z_0\right)\right)$. Поэтому все эти векторы лежат в одной плоскости. Эта плоскость называется касательной плоскостью к поверхности в данной точке (см. рис. 6).

Уравнение касательной плоскости к поверхности, заданной уравнением $F(x,y,z)=0$, имеет вид:

$$\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}(x - x_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}(y - y_0) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}(z - z_0) = 0.$$

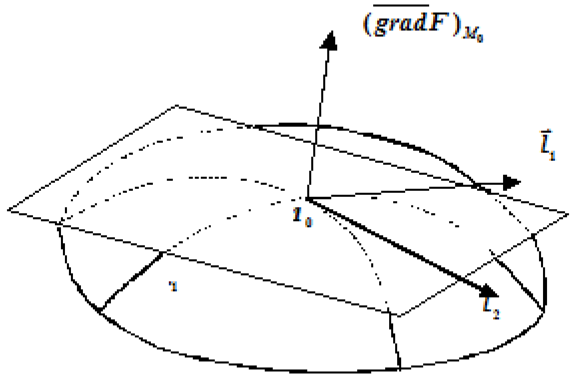

Рис. 6

Прямая, перпендикулярная к касательной плоскости к поверхности и проходящая через точку касания, называется нормалью к поверхности. Заметим, что вектор $\overrightarrow{grad}\left(F\left(x_0, y_0, z_0\right)\right)$ можно рассматривать в качестве направляющего вектора нормали. Напишем её канонические уравнения:

$$\frac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z-z_0}{\left(\dfrac{\partial F}{\partial z}\right)_{M_0}}.$$

В случае, если поверхность задана в виде $z=f(x,y)$, уравнения касательной плоскости и нормали приобретают вид:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}\left(x-x_0\right)+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}\left(y-y_0\right)-\left(z-z_0\right)=0,$$

$$\frac{x-x_0}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial x}\right)_{M_0}} = \frac{y-y_0}{\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)_{M_0}} = \frac{z-z_0}{-1}.$$

Раздел 9. Экстремумы функции многих переменных

Рассмотренное ранее определение экстремума функции одной переменной, а также необходимое и достаточное условия его существования обобщаемы на случай функции нескольких переменных. Рассмотрим сначала функцию двух независимых переменных $z=f(x,y)$, определённую в области D, и изобразим её наглядно поверхностью в декартовой системе координат x, y, z. Мы будем говорить, что функция имеет максимум в некоторой внутренней точке $(x_0,y_0)\in D$, если значения функции во всех точках некоторой ε-окрестности точки (x_0,y_0) меньше, чем значение функции в этой точке, т.е.

$$f(x,y)<f(x_0,y_0).$$

Геометрически такому максимуму соответствует вершина на поверхности (см. рис. 7). Аналогично минимум определяется неравенством

$$f(x,y)>f(x_0,y_0)$$

в некоторой окрестности точки (x_0,y_0) и соответствует «ямке» на поверхности (см. рис. 7).

Для функции большего числа переменных понятия максимума и минимума определяется аналогично, только уже нельзя дать геометрической иллюстрации. Функция $u = f(x,y,\dots)$ имеет в точке (x_0,y_0,…) максимум (минимум), если она в некоторой окрестности этой точки принимает всюду значения меньшие (большие), чем в самой точке (x_0,y_0,…).

Как и в случае функции одной переменной, наряду со словами максимум и минимум будем пользоваться термином экстремум, объединяющим эти два понятия. Сформулируем теперь необходимые условия существования экстремума, т.е. такие условия, которые непременно должны быть выполнены в точке $M_0(x_0, y_0,\dots)$ если функция имеет в этой точке экстремум.

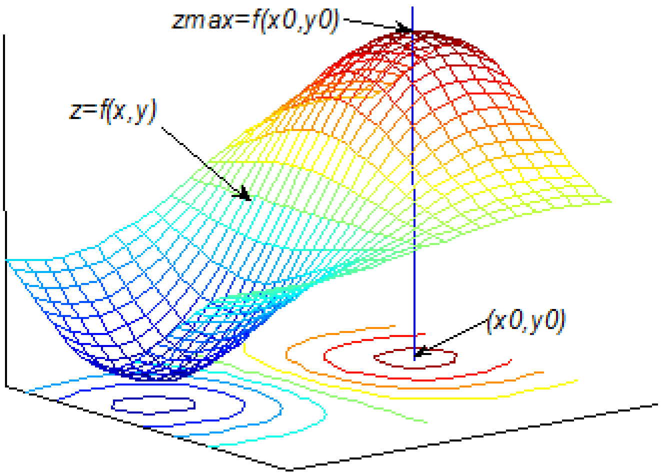

Рис. 7

Для того, чтобы дифференцируемая функция $u=f(x,y,\dots)$ имела экстремум в точке $M_0(x_0,y_0, \dots)$ необходимо, чтобы все ее частные производные обращались в этой точке в ноль, т.е. чтобы выполнялись следующие равенства:

$$\begin{cases} f'_x(x_0, y_0, z_0,\dots) = 0 \\ f'_y(x_0, y_0, z_0,\dots) = 0 \\ f'_z(x_0, y_0, z_0,\dots) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases} . \qquad (9)$$

Эти условия легко получаются из известного необходимого условия экстремума дифференцируемой функции одной переменной. В самом деле, зафиксируем, например, переменные $y=y_0$, $z=z_0$, … и будем рассматривать функцию в окрестности точки M_0 как функцию $f(x,y_0, z_0,\dots)$ зависящую только от x. Тогда она имеет экстремум при $x=x_0$, а необходимым условием такого экстремума является равенство:

$$f'_x(x_0, y_0, z_0,\dots) = 0 .$$

В случае дифференцируемой функции двух переменных $f(x,y)$ это необходимое условие имеет простой геометрический смысл: функция может иметь в точке $M_0(x_0,y_0)$ экстремум лишь в том случае, если поверхность $f(x,y)$ имеет в этой точке касательную плоскость, параллельную плоскости xOy. Рассмотрим, например, функцию $f=xy$. Необходимые условия показывают, что начало координат - точка, подозрительная на экстремум.

Однако в окрестности этой точки функция принимает как положительные, так и отрицательные значении, смотря по тому, в какой четверти берётся точка. Тогда в точке (0,0) функция экстремума не имеет. Изображающий эту функцию гиперболический параболоид имеет в начале координат так называемую точку перевала или седловину**.**

Точки, в которых выполняются необходимые условия экстремума (9), называют, как и в случае функции одной переменной, стационарными. Другие точки, в которых могут быть экстремумы, - это точки, в которых частные производные или не существуют, или обращаются в бесконечность. В совокупности со стационарными эти точки называют критическими. Например, рассмотрим функции

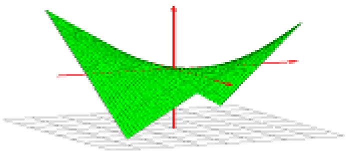

Рис. 8.

$$f=\sqrt{x^2+y^2}\,,\ f=\sqrt[3]{x^2+y^2}\,,$$

графики которых получаются при вращении вокруг оси Oz кривых $f=\sqrt[3]{y^2}$ и $f=|y|$, соответственно (см. рис. 9). Очевидно, что обе эти функции имеют минимум в начале координат. Вместе с тем, частные производные в начале координат не существуют у первой функции и обращаются в бесконечность у второй функции. Таким образом, экстремумы могут находиться и в таких точках.

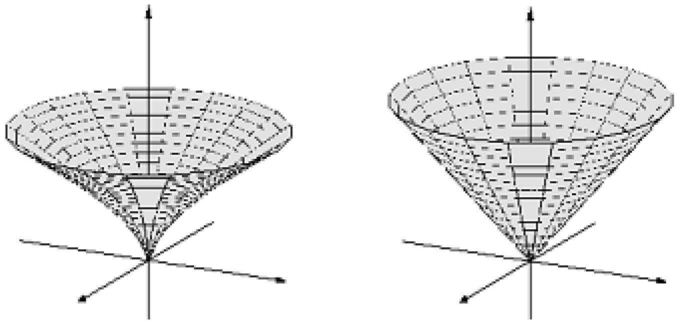

Рис. 9

<u>Пример 8</u>

Дана система n материальных точек $M_k(x_k,y_k,z_k)$ с массами m_k. Из физических соображений ясно, что момент инерции этой системы имеет минимум относительно некоторой точки. Требуется найти эту точку. Задача сводится к нахождению минимума функции трёх переменных:

$$I(x,y,z)=\sum_{k=1}^{n}m_k\left[(x-x_k)^2+(y-y_k)^2+(z-z_k)^2\right].$$

Необходимое условие экстремума даёт возможность найти координаты этой точки. Для этого нужно решить систему уравнений:

$$\begin{cases} I'_x = 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\left(x - x_k\right) = 0 \\ I'_y = 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\left(y - y_k\right) = 0 \\ I'_z = 2\sum\limits_{k=1}^{n} m_k\left(z - z_k\right) = 0 \end{cases}.$$

Проверяем, что искомая точка является центром масс (центром тяжести) данной совокупности материальных точек

$$x = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k},\ y = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k},\ z = \frac{\sum m_k z_k}{\sum m_k}.$$

Следует заметить, что суммирование в этих формулах производится по всем точкам.

Во многих случаях специальный характер решаемой задачи позволяет судить о том, будет ли в стационарной точке экстремум и какой конкретно. Например, в предыдущей задаче из физических соображений было ясно, что есть точка пространства, где момент инерции системы материальных точек принимает наименьшее значение. Желательно было бы иметь, как и в случае функции одной переменной достаточные условия экстремума, позволяющие различать среди стационарных точек те, где есть экстремум, и определять, каков он: максимум или минимум.

Рассмотрим стационарную точку (x_0,y_0) функции $f(x,y)$, т.е. точку в которой обращаются в нуль обе частные производные f'_x и f'_y. Вычислим вторые производные в этой точке и введём, для краткости, следующие обозначения:

$$\frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x^2} = A,\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial x \partial y} = B,\ \frac{\partial^2 f(x_0,y_0)}{\partial y^2} = C.$$

Примем без доказательства следующие правила:

1) если в стационарной точке выполняется неравенство $AC\text{-}B^2>0$, то в этой точке функция $z=f(x,y)$ имеет экстремум; при этом, если $A<0$, то $f(x_0,y_0)$ - максимум, если $A>0$, то $f(x_0,y_0)$ - минимум;

2) если в стационарной точке $AC\text{-}B^2<0$, то функция не имеет экстремума в этой точке;

3) случай $AC\text{-}B^2=0$ требует дополнительного исследования.

<u>Пример 15</u>

Исследовать на экстремум функцию:

$$f=5-2x+6y-2xy-x^2.$$

Находим стационарные точки, решая систему

$$\begin{cases} f'_x = -2-2y-2x=0 \\ f'_y = 6-2x=0 \end{cases} \Rightarrow \quad M_0(3,-4).$$

В данном случае получаем единственную стационарную точку M_0 с координатами $M_0(3;-4)$. Вычисляем вторые производные в этой точке: A=-2, B=-2, C=0. $AC-B^2<0$, т.е. экстремума нет.

Пример 16

Исследовать на экстремум функцию:

$$f=(x-1)^2+(y-1)^2.$$

Находим стационарные точки, решая систему

$$\begin{cases} f'_x = 2(x-1)=0 \\ f'_y = 2(y-1)=0 \end{cases}.$$

Вычисляем вторые производные в этой точке: A=C=2, B=0, поэтому экстремум есть.

Условный экстремум

Часто возникает задача не просто найти экстремум функции n переменных:

$$u=f(x,y,\ldots),$$

а найти её экстремум при дополнительных условиях, связывающих переменные посредством m уравнений связей ($m < n$)

$$g_k(x,y,...)=0,\ k=1,\ ...,\ m.$$

Такие экстремумы называют условными. Например, пусть требуется найти минимум функции

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

при дополнительном условии $x+y=1$. Следующий рисунок делает решение задачи очевидным.

С учётом уравнения связи мы на самом деле имеем функцию одной переменной

$$f(x,1-x)=2x^2-2x+1$$

и её экстремум легко находится. Следовательно, функция

$$f(x,y)=x^2+y^2$$

имеет условный минимум f_{min}=0.5 в точке (0.5,0.5).

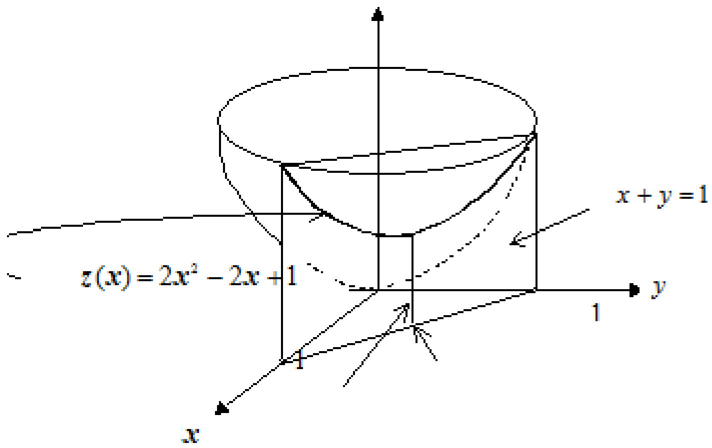

Рис. 10

Таким образом, задача нахождения условных экстремумов не является принципиально новой. Разрешая уравнения связи относительно m неизвестных и подставляя их в исходную функцию, мы получаем задачу отыскания безусловного экстремума функции меньшего (n-m) числа переменных. Если задача разрешения уравнений связи не вызывает трудностей, то так и следует поступать. Но весьма часто это либо трудоёмкая задача, либо принципиально неразрешимая (вспомним, что не всегда можно перейти от неявного задания функции к её явному заданию). Представляется важным сформулировать необходимые условия существования условного экстремума. Такая формулировка была предложена Ж.Л. Лагранжем (1736 - 1813 гг.). Пусть требуется найти экстремумы функции

$$u=f(x_1,x_2,\ldots,x_n),$$

причём её n аргументов подчинены m уравнениям связей ($m<n$):

$$g(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0,\ k=1,\ ...,\ m.$$

Введём m так называемых неопределённых множителей Лагранжа $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \ldots,\ \lambda_m$ и образуем функцию Лагранжа

$$F=f+\lambda_1 g_1+\lambda_2 g_2+\ldots+\lambda_m g_m.$$

Эта функция зависит от $n+m$ переменных: $x_1,\ldots,\ x_n,\ \lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_m$. Запишем для нее необходимые условия экстремума

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial x_n}=0,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_1}=0,\ \ldots,\ \frac{\partial F}{\partial \lambda_m}=0. \qquad (10)$$

Заметим, что последние m уравнений в (10) совпадают с уравнениями связей. Следует заметить, что необходимые условия экстремума функции Лагранжа являются одновременно необходимыми условиями условного экстремума исходной функции.

Далее проведём обоснование метода множителей Лагранжа на примере функции двух переменных с одним уравнением связи. Допустим, что уравнение связи $g(x,y)=0$ изображается гладкой кривой, т.е. кривой, в каждой точке которой существует касательная. Мы должны найти экстремум функции $z=f(x,y)$, когда точки (x,y) лежат на этой кривой. Двигаясь вдоль кривой $g\,(x,y)=0$, например, слева направо, мы последовательно пересекаем линии уровня $f(x,y)=C$. В точке (x_0,y_0), где кривая $g(x,y)=0$ касается одной из линий уровня $f(x,y)=C_*$, следует ожидать максимума, т.к. при переходе через эту точку возрастание C сменяется убыванием. Тогда нормальные векторы в этой точке к кривой $g(x,y)=0$ и к соответствующей линии уровня $f(x,y)=C$ коллинеарны. Эти векторы являются градиентами функций f и g в точке касания:

$$\left(\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial x};\frac{\partial f(x_0,y_0)}{\partial y}\right)=\left(f'_x;f'_y\right);\ \left(\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial x};\frac{\partial g(x_0,y_0)}{\partial y}\right)=\left(g'_x;g'_y\right).$$

Из условия коллинеарности этих векторов

$$\frac{f'_x}{g'_x}=\frac{f'_y}{g'_y}=-\lambda$$

следуют равенства

$$\begin{cases} f'_x+\lambda g'_x=0 \\ f'_y+\lambda g'_y=0 \end{cases}. \qquad (11)$$

Таким образом, условия (11) выражают необходимые условия условного экстремума. Образовав функцию Лагранжа

$$F(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\, g(x,y),$$

получаем, что условия (11) совпадают с необходимыми условиями экстремума этой функции.

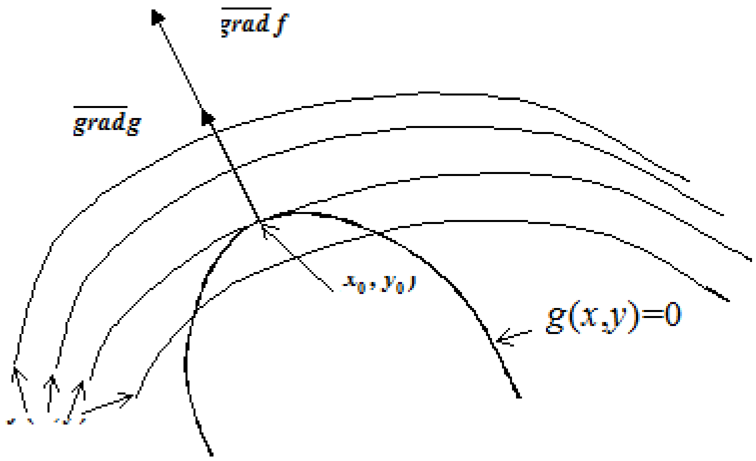

Рис. 11

Пример 17

Найти экстремумы функции $f(x,y)=x^2+y^2$ при условии, что её аргументы связаны соотношением:

$$5x^2-6x\,y+5y^2-32=0.$$

Образуем функцию Лагранжа

$$F(x,y,\lambda)=x^2+y^2+\lambda(5x^2-6x\,y+5y^2-32).$$

Приравнивая к нулю её частные производные, получаем следующую систему для нахождения координат стационарных точек:

$$x+\lambda(5x-3y)=0;\ y+\lambda(-3x+5y)=0;\ 5x^2-6xy+5y^2-32=0.$$

Исключая из первых двух уравнений параметр λ, получаем:

$$\begin{cases} y+x\dfrac{3x-5y}{5x-3y}=0 \Leftrightarrow y(5x-3y)+x(3x-5y)=0 \Leftrightarrow y^2=x^2 \\ 5x^2-6xy+5y^2-32=0 \end{cases}$$

В случае $y_0=x_0$ находим точки $\left(2\sqrt{2};\,2\sqrt{2};\,-0.5\right)$, $\left(-2\sqrt{2};\,-2\sqrt{2};\,-0.5\right)$. А если $y_0=-x_0$, то получаем точки $\left(2\sqrt{2};\,-2\sqrt{2};\,-1/8\right)$, $\left(-2\sqrt{2};\,2\sqrt{2};\,-1/8\right)$.

<u>Пример 18</u>

Найти экстремумы функции $f(x,y)=x^3+y^2$ при условии, что её аргументы связаны соотношением:

$$x\,y-4=0.$$

Образуем функцию Лагранжа

$$F(x,y,\lambda)=x^3+y^2+\lambda(x\,y-4).$$

Приравнивая к нулю её частные производные, получаем следующую систему для нахождения координат стационарных точек:

$$\begin{cases} 4x^3+\lambda\,y=0 \\ 2y+\lambda\,x=0 \\ x\,y-4=0 \end{cases}$$

Исключая из первых двух уравнений параметр λ, получаем:

$$\begin{cases} y^2=2\,x^4 \\ x\,y=4 \end{cases}$$

В случае $y_0=\sqrt{2}x_0^2$ находим точки $\left(\sqrt{2};\,2\sqrt{2};\,8+2\sqrt{2}\right)$. А если $y_0=-\sqrt{2}x_0^2$, то получаем точки $\left(-\sqrt{2};\,2\sqrt{2};\,8-2\sqrt{2}\right)$.

КОНТРОЛЬНЫЕ ЗАДАНИЯ

I) Построить поверхности уровня следующих функций, а также их линии уровня, считая z=0

1.01 $f=x^2+y^2+2y-z+4$;	1.02 $f=x^2+y^2+3y-z^2+1$;	1.03 $f=x^2+y^2+y+z^2+3$;
1.04 $f=x^2-5x-y^2+z^2+3$;	1.05 $f=x^2+2x-y+z^2+6$;	1.06 $f=2x^2-3y^2+4z^2+1$;
1.07 $f=2x^2-3y+4z^2+1$;	1.08 $f=3y^2+4z^2+9-2x^2$;	1.09 $f=2x^2+3y^2+4z^2+4$;
1.10 $f=2x^2+3y^2-4z^2+7$;	1.11 $f=6x^2+4y^2-2z^2-3$;	1.12 $f=3x^2+7y^2+9z+5$;
1.13 $f=2x^2+4y^2+5z^2-2$;	1.14 $f=3x^2-8y^2+7z^2+2$;	1.15 $f=6x^2-4y^2+8z^2+8$;
1.16 $f=2x^2+3y+z^2-8$;	1.17 $f=x^2+3y^2-7z^2+1$;	1.18 $f=4x^2+3y^2+4z^2+2$;
1.19 $f=2x^2+3y^2+5z^2+1$;	1.20 $f=-x^2+2y^2+3z+4$;	1.21 $f=2x^2+y^2+3z^2+7$;
1.22 $f=6x^2+3y^2-z^2+4$;	1.23 $f=-x^2+2y^2+3z+7$;	1.24 $f=x^2-y^2-z+5$;
1.25 $f=x^2+2y^2-5z^2+6$;	1.26 $f=2x^2+y^2+2z^2-6$;	1.27 $f=x^2+y^2+z^2+2$;
1.28 $f=4x^2-6y^2+3z^2+9$;	1.29 $f=x^2+y^2-z+1$;	1.30 $f=x^2-y^2-z^2+7$.

II) Найти значения пределов в точке $M(x,y)$. Если функция имеет разрыв в данной точке, определить тип разрыва

2.01 $\lim\limits_{\substack{x\to 7\\ y\to -2}} \left(e^{x^2 y} - x^2 y\right)$;	2.02 $\lim\limits_{\substack{x\to -3\\ y\to 4}} \dfrac{y}{x^2 - y^2}$;	2.03 $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ y\to \pi^2/3}} \left(\dfrac{\sqrt{3x+y}}{3xy}\right)$;
2.04 $\lim\limits_{\substack{x\to -2\\ y\to 4}} \sqrt{x^3 + 16y}$	2.05 $\lim\limits_{\substack{x\to 3\sqrt{\pi}\\ y\to \sqrt{\pi}}} \cos\left(x^2 - y^2\right)$	2.06 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \ln\left(x^2 - 4y^3\right)$
2.07 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 3}} \ln\left(5y^2 - x^3\right)$	2.08 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \sqrt{x^3 + x^2 y + 1}$	2.09 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to \pi}} \sin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$
2.10 $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ y\to 0}} tg\left(x^2 y\right)$	2.11 $\lim\limits_{\substack{x\to 1,5\\ y\to \pi}} \sin\left(x^2 y\right)$	2.12 $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 1}} \left(x^2 + 3xy + y^2\right)$
2.13 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}} \left(3x^2 y - y + 1\right)$	2.14 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 4}} \left(x - 4\sqrt{y}\right)$	2.15 $\lim\limits_{\substack{x\to 6\\ y\to \pi^2/3}} \left(\dfrac{3\sqrt{xy}}{3x + y}\right)$
2.16 $\lim\limits_{\substack{x\to 5\\ y\to 11}} \left(\sqrt{x+y}\right)$	2.17 $\lim\limits_{\substack{x\to \sqrt{\pi}\\ y\to 2}} \sin\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$	2.18 $\lim\limits_{\substack{x\to \sqrt{\pi}\\ y\to 1}} tg\left(x^2 y\right)$
2.19	2.20	2.21

$\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\pi/3}}\left(\dfrac{x-2y+3\sqrt{xy}}{3x+y}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}}\left(\dfrac{y^3}{5x^2}-6\sqrt{y^2+1}\right)$ $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to 4}}\ln\left(tg\left(\dfrac{x}{y}\right)e^{3x^2+y}\right)$

2.22 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 1}}\left(\dfrac{x^2}{y}\right)$ 2.23 $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to -\pi}} tg\left(\dfrac{x}{y}\right)$ 2.24 $\lim\limits_{\substack{x\to\pi\\ y\to 2}}\cos\left(\dfrac{2x}{y}\right)$

2.25 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 7}}\left(3x^2-y\right)$ 2.26 $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 3}}\left(x^2-y^2\right)$ 2.27 $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to 2}}\left(y+\sqrt{x}\right)$

2.28 $\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ y\to 2}}\ln\left(\dfrac{x^2}{4y^3}\right)$ 2.29 $\lim\limits_{\substack{x\to 4\\ y\to 3}}\left(\dfrac{5x^2y^2}{6\sqrt{y^2+x}}\right)$ 2.30 $\lim\limits_{\substack{x\to\sqrt{3}\\ y\to\pi}} tg\left(\dfrac{y}{x^2}\right)$.

III) Вычислить частные производные первых двух порядков, градиенты и дивергенции градиентов функций, приведённых в задании I. Найти также крутизну функций в точке M и соответствующий ей угол

3.01 $M(3,2,1)$	3.02 $M(4,5,6)$	3.02 $M(4,5,6)$	3.04 $M(7,5,4)$	3.05 $M(2,3,5)$
3.06 $M(6,4,8)$	3.07 $M(2,2,2)$	3.08 $M(3,5,9)$	3.09 $M(4,6,0)$	3.10 $M(5,4,3)$
3.11 $M(6,9,3)$	3.12 $M(0,2,1)$	3.13 $M(2,0,0)$	3.14 $M(2,1,7)$	3.15 $M(3,5,6)$
3.16 $M(4,3,2)$	3.17 $M(5,9,7)$	3.18 $M(4,9,1)$	3.19 $M(1,7,8)$	3.20 $M(2,5,4)$
3.21 $M(7,4,3)$	3.22 $M(8,5,4)$	3.23 $M(6,2,1)$	3.24 $M(8,0,3)$	3.25 $M(4,5,2)$
3.26 $M(6,1,4)$	3.27 $M(3,2,2)$	3.28 $M(0,4,3)$	3.29 $M(2,5,1)$	3.30 $M(8,6,0)$

IV) Вычислить ротор следующих векторов

3.01 $\vec{V}(x,y,z)=e^{-x^2+5y+3z^3}\,\vec{i}+\cos\left(4x^2yz^8\right)\vec{j}+\ln\left(\dfrac{1}{x^2y^3z^4}\right)\vec{k}$;

3.02 $\vec{V}(x,y,z)=\left(-x^2+5y+3z^3\right)\vec{i}+\sin\left(x^2+y^3z^4\right)\vec{j}+\left(x+y^2\right)e^{z^4}\,\vec{k}$;

3.03 $\vec{V}(x,y,z)=(6x+4y+3z)\,\vec{i}+\dfrac{x^2y^3}{z^2}\vec{j}+z\cdot\ln\left(x+y^2\right)\vec{k}$;

3.04 $\vec{V}(x,y,z)=tg\,(6xy+7z)\,\vec{i}+\dfrac{z\,\vec{j}}{x^2y^3}+z\cdot\cos\left(x+y^2\right)\vec{k}$;

3.05 $\vec{V}(x,y,z)=(6x+5yz)\,\vec{i}+\dfrac{6x^3+5y^2+z}{xy}\,\vec{j}+e^{z\left(x+y^2\right)}\vec{k}$;

3.06 $\vec{V}(x,y,z)=\sin(xyz)\,\vec{i}+\ln\left(\dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}\right)\vec{j}+e^{xyz}\,\vec{k}$;

3.07 $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt{x^3+16y+z^2}\ \vec{i}+\left(e^{x^2y}-x^2y\right)\vec{j}+\left(3x^2\,y-y+1\right)\vec{k}$;

3.08 $\vec{V}(x,y,z)=\left[\dfrac{yz}{x^4}+\sin\left(\dfrac{x^4}{yz}\right)\right]\vec{i}+\dfrac{xyz\,\vec{j}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}+sh\left(\dfrac{x^2+y^2+z^2}{x+y+z}\right)\vec{k}$;

3.09 $\vec{V}(x,y,z)=z\sin\left(\dfrac{y}{x}\right)\vec{i}+\sqrt{3x^2\,y-y+z}\ \vec{j}+\left(3x^3-e^y+z\right)\vec{k}$;

3.10 $\vec{V}(x,y,z)=y\vec{i}+\ln\left(x-y^3+5z\right)\vec{j}+\sqrt{\dfrac{3x^2+5y+z}{xyz}}\,\vec{k}$;

3.11 $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{8z+3y}{6x}\vec{i}+\ln\left[\cos\left(\dfrac{xz}{y^3}\right)\right]\vec{j}+\sqrt{\dfrac{x^3+5y}{xz}}\,\vec{k}$;

3.12 $\vec{V}(x,y,z)=sh\left(\dfrac{5x+4y}{3z}\right)\vec{i}+tg\left(\dfrac{xz}{y^3}\right)\vec{j}+\left(x^3+5y+3\right)\vec{k}$;

3.13 $\vec{V}(x,y,z)=tg\left(\dfrac{5x+4y}{3z}\right)\vec{i}+\ln\left(xz+y^3\right)\vec{j}+\sqrt[3]{x+7y^2-6z^4}\,\vec{k}$;

3.14 $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt{\dfrac{x^3+16y}{x+8z}}\,\vec{i}+\dfrac{y\,e^z}{x^2-y^2}\,\vec{j}+z\left(e^{x^2y}-x^2y\right)\vec{k}$;

3.15 $\vec{V}(x,y,z)=z^8\ln\left(x^2-4y^3\right)\vec{i}+z\cdot\sin\left(x^2y\right)\vec{j}+\dfrac{\sqrt{x+y}}{z+e^{-z^3}}\vec{k}$;

3.16 $\vec{V}(x,y,z)=tg\left(\dfrac{y}{xz}\right)\vec{i}+z^3\cdot\ln\left(5y^2-x^3\right)\vec{j}+\dfrac{x^8}{y+z}\vec{k}$;

3.17 $\vec{V}(x,y,z)=\sin\left(\dfrac{y+z}{x+z}\right)\vec{i}+z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)\vec{j}+\sqrt[3]{\dfrac{x^8}{y+z}}\,\vec{k}$;

3.18 $\vec{V}(x,y,z)=\sin\left(\dfrac{y+z}{x+z}\right)\vec{i}+z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)\vec{j}+\sqrt[3]{\dfrac{x^8}{y+z}}\,\vec{k}$;

3.19 $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{y+z}{x+z}e^{x+3z}\ \vec{i}+\sqrt[3]{z^2\cdot\left(5y^2-x^3\right)}\,\vec{j}+e^{x+y^2+3z}\,\vec{k}$;

3.20 $\vec{V}(x,y,z)=th\left[(x+y+z)\,e^{x+3z}\right]\vec{i}+5\left(y^2+x^3\right)z^{-4}\,\vec{j}+\left(x+y^2+3z\right)\vec{k}$;

3.21 $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{x+3z}{7z}\,\vec{i}+8\left(y^2+x^3\right)\ln\left(6y+5z^4\right)\vec{j}+\left(x^4+y^3+z^2\right)\vec{k}$;

3.22 $\vec{V}(x,y,z)=\left(x+6y+3z^2\right)th\left(\dfrac{xy}{z}\right)\vec{i}+ch^z\left(y^2+x^3\right)\vec{j}+tg\left(5y+3z\right)\vec{k}$;

3.23 $\vec{V}(x,y,z)=tg\left(x+6y+3z^{2}\right)\vec{i}+\ln\left(\dfrac{y^{2}+x^{3}}{z}\right)\vec{j}+\dfrac{xy}{z}\vec{k}$;

3.24 $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt{x+6y+3z^{2}}\ln(2z)\,\vec{i}+\dfrac{y^{2}+x^{3}}{x-z^{2}}\vec{j}-(x+y+z)\vec{k}$;

3.25 $\vec{V}(x,y,z)=8x\cdot\sin\left(2y+z^{2}\right)\vec{i}+\left(x-z^{2}\right)\cdot\left(y^{2}+x^{3}\right)\vec{j}+ch(x+y+z)\vec{k}$;

3.26 $\vec{V}(x,y,z)=\sqrt[4]{x+6y+3z^{2}}\;\vec{i}+z^{2}\cdot\left(5y^{2}-x^{3}\right)\vec{j}+e^{x+y^{2}+3z}\,\vec{k}$;

3.27 $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{y+z}{x+z}e^{x+3z}\;\vec{i}+tg\left(\dfrac{x+6y+3z^{2}}{2yz}\right)\vec{j}+e^{z\left(3x-y^{2}\right)}\vec{k}$;

3.28 $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{x^{2}+5y-3z^{3}}{x^{2}+y^{3}z^{4}}\;\vec{i}+sh\left(\dfrac{x^{2}+y^{3}z^{4}}{x^{2}+5y-3z^{3}}\right)\vec{j}+tg\left(\dfrac{x-6y^{2}-3z^{5}}{\sqrt[3]{x+6y+3z^{2}}}\right)\vec{k}$;

3.29 $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{y-z}{x+z^{2}}\ln(z)\vec{i}+\dfrac{5\sin(y)\vec{j}}{z^{2}\cdot\left(5y^{2}-x^{3}\right)}+\dfrac{x+y^{2}+3z}{3x+5y^{2}+8z^{3}}\vec{k}$;

3.30 $\vec{V}(x,y,z)=\dfrac{\sqrt{x^{3}+x^{2}y+1}}{x+3y+z^{2}}\vec{i}+tg\left(z\dfrac{y}{x}\right)\vec{j}+\dfrac{x-2y+3\sqrt{xy}+4z^{2}}{3z\cdot(5x+7y)}\vec{k}$.

V) Для функций задания I найти их условные и безусловные экстремумы, считая $z=0$. В качестве условий выбрать функции $g=x+2y=0$ для вариантов 1.01 - 1.10, $g=x-3y=0$ для вариантов 1.11-1.20, $g=2x+5y=0$ для вариантов 1.21-1.30.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данном пособии изложены основные понятия о функциях многих переменных, их пределах и частных производных, экстремумах функций многих переменных, элементах теории поля. Для закрепления теоретических знаний по аналитической геометрии в данном пособии приведены примеры решения задач и контрольные задания. Пособие ориентировано на развитие у студентов компетенций ОПК-1 (Способность применять математический инструментарий для решения экономических задач) и ПК-1 (Способность подготавливать исходные данные, необходимые для расчета экономических показателей, характеризующих деятельность хозяйственных субъектов). В результате изучения раздела математики “Математический анализ” курса “Математика” студенты должны уметь вычислять пределы функций многих переменных, их частные производные, находить экстремумы функций многих переменных.

ЛИТЕРАТУРА

1. А.Н. Канатников, А.П. Крищенко, В.Н. Четвериков. Дифференциальное исчисление функций многих переменных. - М.: “Наука”, 2000. - 445 с.
2. И.В. Садовничая, Т.Н. Фоменко. математический анализ. Функции многих переменных. 2-е изд., пер. и доп. Учебник и практикум для академического бакалавриата - М.: Издательство Юрайт, 2019. - 206 с.
3. В.В. Ивлев. Математический анализ. Функции многих переменных. - М.: “ИКАР”, 2013. - 548 с.
4. В.П. Минорский. Сборник задач по высшей математике. - М.: Издательство Физико-математической литературы, 2004. - 336 с.
5. Л.Д. Кудрявцев. Курс математического анализа. Т. 1,2,3. - М.: Высшая школа, 1981. - 688 с., 584 с., 352 с.
6. В.А. Ильин, В.А. Садовничий, Б.Х. Сендов. Математический анализ. Т. 1,2. - М.: Высшая школа, 1981. - 660 с., 357 с.

Евгений Леонидович **Панкратов**

ФУНКЦИИ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Учебно-методическое пособие